Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

# Математический анализ

## Числовые ряды. Занятие 1

# СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 1

группа · 201
Сычугов Д.Ю



## ТЕОРИЯ:

**Определение 1** $\{a_n\}$ - числ. посл., $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$ ($S$ - конечное число), то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сход., $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **(1)**

**Теорема 1.** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход. $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (необх. услов. сход.)

Достаточным не является. Например, ряд (гармонический)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ расходится.

Почему? $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n-1} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слаг.}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq 1/2} + \ldots$$ Ряд расходится

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 1



**Теорема 2 (критерий Коши)** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ \forall m > n > N(\varepsilon) \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

Для знакопостоянных рядов (с положительными членами) $\exists$ признаки сравнения:

**Признаки сравнения:**

1) $\forall k \quad 0 < a_k \le b_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сход. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сход.;

2) $\forall k \quad b_k \ge a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расх. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – расход.;

3) $a_k > 0, b_k > 0$ для $\forall k$ и $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = C, (C \ne 0, C \ne \infty)$ $\Rightarrow$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сход. либо расход. одноврем.

# СЕМИНАР №1, СЕМЕСТР 1



**N2549** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$

непосредственно вычисляем $S_n$:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$, ряд сходится

Аналогично, N2550 – решить самим.

(Способ 1: непосредств. вычисление $S_n$)

**№2554** Дано: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход. (1)

Далее, строим новый ряд: $\underbrace{(a_1+a_2)}_{A_1} + \underbrace{(a_3+a_4+a_5)}_{A_2} + \underbrace{(a_6+a_7)}_{A_n} + \dots \Rightarrow$ доказать, что $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ тоже сход. (2)

(обратное неверно) Например: $(1-1)+(1-1)+\dots(1-1)+\dots$ - сход.

Док Ряд (1) сход. $\Leftrightarrow$ для (1) выполн. критерий Коши.

Докажем, что тогда кр. Коши вып. и для (2): Пусть $m>n$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} A_k\right| = \left|A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+p}\right| = \Big|\underbrace{(a_{L(n)} + a_{L(n)+1} + \dots + a_{L(n)+p(n)})}_{A_n} +$$

$$+ \underbrace{(a_{L(n+1)} + a_{L(n+1)+1} + \dots + a_{L(n+1)+p(n+1)})}_{A_{n+1}} + \dots + \underbrace{(a_{L(m)} + a_{L(m)+1} + \dots + a_{L(m)+p(m)})}_{A_m}\Big|$$

$$= \left|\sum_{k=L(n)}^{L(m)+p(m)} a_k\right| < \varepsilon, \text{ если } L(n) < N(\varepsilon), \text{ док}$$

Удобно при выч. сумм сх. рядов

$\boxed{2555}$ Дано: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - сход.

($A_n$ - по <u>тому же правилу</u>, что в пред. задаче)

Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход.

<u>Док-во</u> Все $a_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{все } A_k > 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \text{ - сход.} \end{cases} \Rightarrow$ последовательность $\{S_n\}$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ огр. сверху монотонно возр.

$\Rightarrow$ послед. $\hat{S}_m = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j$ также огр. и мон. возр. $\Rightarrow \{\hat{S}_m\} \longrightarrow \Rightarrow$ <u>ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход.</u>

(теорема была: ограниченная сверху и мон. возр. числ. последов. сходится)

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2



$\boxed{2558}$ $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ ?

Ряд сходится. Почему?

При $n\geq 4$ верно $n!>2^n$ – докажите $\Rightarrow$ (метод матем. индукции) $\Rightarrow$

при $n\geq 4$: $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum\limits_{k=m}^{m+p}\frac{1}{k!}<\sum\limits_{k=m}^{m+p}\frac{1}{2^k}$ – сход. ряд

$\boxed{2576}$ Уже было: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расход.

$\boxed{2559}$ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\frac{1}{2n-1}+\ldots$ ? $a_n=\frac{1}{2n-1}$, возьмем

$$b_n=\frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ – расх} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – расх.}$$

# СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 1



**2570** Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$ (1)

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расход.

Док-во 1) Из (1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопостоянный

2) $b_n = \frac{1}{n}$ - член расх. ряда. Из условия следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - расх.}$$

На дом: 2552, 2553, 2562, 2567, 2568, 2575, 2577